UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JOÃO MARCOS RIBEIRO DO CARMO

Problema do Subespaço Invariante e Operadores de Composição

Campinas
Agosto 2017

João Marcos Ribeiro do Carmo

Problema do Subespaço Invariante e Operadores de Composição

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Sahibzada Waleed Noor

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno João Marcos Ribeiro do Carmo e orientada pelo Prof. Dr. Sahibzada Waleed Noor.

Campinas

Agosto 2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Márcia Pillon D'Aloia - CRB 8/5180

C213p

Carmo, João Marcos Ribeiro do, 1993-
Problema do subespaço invariante e operadores de composição / João Marcos Ribeiro do Carmo. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Sahibzada Waleed Noor.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Operadores de composição. 2. Subespaços invariantes. 3. Hardy, Espaços de. I. Noor, Sahibzada Waleed,1984-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Invariant subspace problem and composition operators
Palavras-chave em inglês:
Compositions operators
Invariant subspaces
Hardy spaces
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Sahibzada Waleed Noor [Orientador]
Lucas Catão de Freitas Ferreira
Valdir Antonio Menegatto
Data de defesa: 07-08-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 07 de agosto de 2017 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). SAHIBZADA WALEED NOOR

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATAO DE FREITAS FERREIRA

Prof(a). Dr(a). VALDIR ANTONIO MENEGATTO

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

À minha família que, com muito carinho e apoio, não mediu esforços para que eu cumprisse mais esta etapa de minha vida

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus pela vida e por ter me dado forças para iniciar e concluir esse curso.

À UNICAMP por me aceitar como aluno regular do mestrado em matemática e por dispor de uma ótima infraestrutura.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Ministério da Educação), bem como à todo povo brasileiro, que com seus esforços possibilitam bolsas de incentivo à pesquisa em nosso país.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sahibzada Waleed Noor pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos. Também agradeço a todos os professores do IMECC que me ensinaram ao longo do mestrado.

A minha família; por terem me dado apoio e incentivo durante todo o decorrer do curso.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Resumo

O problema do subespaço invariante é o mais importante problema aberto na teoria dos operadores. Foi obtida uma solução para o caso particular dos espaços de Banach, mas o caso geral ainda permanece em aberto. Em particular, o problema do subespaço invariante para espaços de Hilbert separáveis está em aberto e este é considerado o caso mais importante. O objetivo dessa dissertação é introduzir uma abordagem do problema do subespaço invariante para espaços de Hilbert separáveis usando a teoria dos operadores de composição no espaço de Hardy-Hilbert das funções analíticas no disco aberto unitário.

Palavras-chave: Operador de Composição. Subespaço Invariante. Espaço de Hardy.

Abstract

The invariant subspace problem (ISP) is the most important open problem in operator theory. Solutions for particular Banach spaces have been obtained, but the general problem still remains open. In particular, the ISP for separable Hilbert spaces also remains open and this is considered the most important case. The objective of this dissertation is to introduce an approach to the ISP for separable Hilbert spaces using the theory of composition operators on the Hardy-Hilbert space of analytic functions on the open unit disk.

Keywords: Composition Operator. Invariant Subspace. Hardy Space.

Lista de símbolos

$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{D}$	Disco aberto unitário
S^1	Círculo unitário em $\mathbb{C}$
$B(X)$	Espaço dos operadores limitados sobre o espaço de Banach X
$K(X)$	Conjunto dos operadores compactos sobre o espaço X
$R(T)$	Imagem do operador T
$N(T)$	Núcleo do operador T
$M \oplus N$	Soma direta de dois subespaços vetoriais
M$\ominus N$	Expressão usada pra denotar $M \cap N^{\perp}$
$\sigma(T)$	Espectro do operador T
$r(T)$	Raio espectral do operador T
T^*	Adjunto do operador T
$Lat(T)$	Conjunto dos subespaços invariantes próprios do operador T
H^2	Espaço de Hardy-Hilbert de funções analíticas
k_z	Núcleo de reprodução para z em H^2
$P_r(\phi)$	Núcleo de Poisson
C_ϕ	operador de composição induzido pela função analítica ϕ
K_u	Ver 3.3
$\bigvee S$	Ver 3.3

Sumário

Introdução

O problema do subespaço invariante é o mais importante problema em aberto da teoria dos operadores, é desconhecido quem foi o primeiro à formular. Aparentemente o problema foi formulado após a publicação de Beurling sobre subespaços invariantes da shift unilateral (BEURLING, 1949), ou após o trabralho não publicado sobre operadores compactos de Von Neumann.

Nesta dissertação será mostrado como o problema do subespaço invariante pode ser solucionado através da análise dos subespaços invariantes próprios do operador de composição induzido por um automorfismo de disco hiperbólico (Corolário 3.1). Este resultado foi primeiramente descrito por Rosenthal em (NORDGREN; ROSENTHAL; WINTROBE, 1987).

O primeiro capítulo fornece os resultados basicos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Definiremos nesse capítulo o conceito de espaço de Hardy-Hilbert, o conceito de operador de composição, e será mostrado em detalhes alguns resultados importantes sobre o operador de composição induzido por um automorfismo de disco hiperbólico. A principal referência é (MARTÍNEZ-AVENDAÑO; ROSENTHAL, 2007).

No Capítulo 2 na primeira seção será feita uma discussão sobre o problema do subespaço invariante, citaremos para quais casos particulares o problema tem uma solução e na segunda seção introduziremos o conceito de operador universal e demonstraremos um resultado que relaciona o conceito de operador universal com o problema do subespaço invariante. As principais referências são (ENFLO, 1976), (CARADUS, 1969), (LOMONOSOV, 1973).

No Capítulo 3 será mostrado que $C_\phi - \lambda I$ é universal, para todo $\lambda \in \sigma(C_\phi)$, onde C_ϕ é um operador de composição induzido por um automorfismo de disco hiperbólico, assim poderemos reformular o problema do subespaço invariante em função do operador de composição hiperbólico, e na terceira seção desse capítulo motivado pela reformulação do problema do subespaço invarinte mostraremos alguns resultados. As principais referências são (MARTÍNEZ-AVENDAÑO; ROSENTHAL, 2007), (MATACHE, 1993), (CHALENDAR; PARTINGTON, 2011) e (CHKLIAR, 1997).

1 Teoria do Espaço de Hardy-Hilbert

Definiremos nesse capítulo o conceito de espaço de Hardy-Hilbert, o conceito de operador de composição, e serão mostrados em detalhes alguns resultados importantes sobre o operador de composição induzido por um automorfismo de disco hiperbólico. Os resultados e afirmações cuja demonstração será omitida se encontram em (MARTÍNEZ-AVENDAÑO; ROSENTHAL, 2007).

1.1 O Espaço de Hardy

O mais familiar espaço de Hilbert é o l^2, espaço que consiste da coleção de todas as sequências de números complexos $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, tais que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Nesse espaço a adição de vetores e multiplicação de vetores por número complexos são feitas termo a termo. A norma do vetor $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ é

$$\|(a_n)_{n=0}^{\infty}\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}},$$

e o produto interno dos vetores $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ é

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

O espaço l^2 é separável, e todos os espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita são isomorfos.

Definição 1.1. *O espaço de Hardy-Hilbert, denotado por H^2, consiste de todas as funções analíticas $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, tais que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, isto é*

$$H^2 = \{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$$

Para $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $g(z) \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, o produto interno em H^2 é definido por

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

A norma do vetor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é

$$\|f\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

A aplicação $(a_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é claramente um isomorfismo de l^2 em H^2. Em particular H^2 é um espaço de Hilbert separável.

Observe que se $|z_0| < 1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge absolutamente, pois $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, assim $|a_n|$ é limitado e então $\limsup |a_n z_0^n|^{1/n} \leqslant |z_0| < 1$, portanto toda função de H^2 é analítica no disco aberto unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Definição 1.2. *Para $z_0 \in \mathbb{D}$, a função k_{z_0} definida por*

$$k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_0^n} z^n = \frac{1}{1 - \overline{z_0} z}$$

pertence a H^2 e é chamada de *núcleo de reprodução* para z_0 em H^2.

Temos que para $z_0 \in \mathbb{D}$ e $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$, $f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = \langle f, k_{z_0} \rangle$ e $\|k_{z_0}\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n})^{1/2} = 1/(1 - |z_0|^2)^{1/2}$, e a aplicação $f \longmapsto f(z_0)$ é um funcional linear limitado.

O espaço de Hardy-Hilbert também pode ser visto como um subespaço de outro bem conhecido espaço de Hilbert.

Sendo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, denotamos $L^2 = L^2(S^1)$, com respeito à medida de Lebesgue normalizada. O produto interno é dado por

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta$$

onde $d\theta$ denota a medida de Lebesgue não normalizada no intervalo $[0, 2\pi]$. A norma de uma função f em L^2 é dada por

$$\|f\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

Para cada inteiro n, seja $e_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ uma função em S^1. É bem conhecido que o conjunto $\{e_n \ ; \ n \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base ortonormal de L^2. Definimos $\widetilde{H}^2$ como o seguinte subespaço de L^2:

$$\widetilde{H}^2 = \{\widetilde{f} \in L^2 : (\widetilde{f}, e_n) = 0,\, n < 0\}$$

isto é, se $\widetilde{f} \in \widetilde{H}^2$ sua série de Fourier é da forma

$$\widetilde{f}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \text{ com } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

Claramente $\widetilde{H}^2$ é um subespaço fechado de L^2. Também existe uma relação natural entre $\widetilde{H}^2$ e H^2. Relacionamos a função $\widetilde{f} \in \widetilde{H}^2$ tendo série de Fourier $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ com a função analítica $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Essa relação claramente é um isomorfismo entre $\widetilde{H}^2$ e H^2.

Definição 1.3. *Seja $\widetilde{f} \in \widetilde{H}^2$ tendo série de Fourier $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ e $f \in H^2$ tendo série de potência $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Para cada $0 < r < 1$ definimos*

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

Claramente $f_r \in \widetilde{H}^2$ para todo r.

Proposição 1.1. *Para cada $f \in H^2$, $\lim\limits_{r \to 1^-} f(re^{i\theta}) = \widetilde{f}(e^{i\theta})$.*

Proposição 1.2. *Seja f analítica em $\mathbb{D}$. Então $f \in H^2$ se e somente se $\sup\limits_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty$. Além disso, para $f \in H^2$, temos $\|f\|^2 = \sup\limits_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$.*

Demonstração. Seja f uma função analítica em $\mathbb{D}$ com série de potência

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Então, para $0 < r < 1$,

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}.$$

Como

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \delta_{n,m},$$

temos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}.$$

Se $f \in H^2$, então $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} \leqslant \|f\|^2$, para todo $r \in [0,1)$, portanto

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant \|f\|^2 < \infty.$$

Reciprocamente, suponhamos que $f \notin H^2$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 = \infty.$$

Por

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n},$$

vemos facilmente que

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \infty.$$

Além disso, observamos que se $f \in H^2$ e $r_k \to 1$, com $r_k \in [0,1)$, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r_k^{2n} \to \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2,$$

assim, $\|f\|^2 = \sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$ □

Definição 1.4. *O espaço H^∞ consiste de todas as funções que são analíticas e limitadas no disco aberto unitário. As operações de vetor são a soma usual de funções analíticas e a multiplicação de funções analíticas por escalares complexos. A norma de uma função $f \in H^\infty$ é definida por $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)|;\ z \in \mathbb{D}\}$.*

Como a convergência em norma sobre H^∞ implica convergência uniforme no disco, é fácil ver que H^∞ é um espaço de Banach. Pela Proposição 1.2, vemos que toda função em H^∞ está em H^2.

Teorema 1.1. *(Forma Integral de Cauchy) Se f é analítica em um aberto contendo $\overline{\mathbb{D}}$ e $z_0 \in \mathbb{D}$, então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}\frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

Definição 1.5. *Para $0 \leqslant r < 1$ e $\psi \in [0, 2\pi]$, o núcleo de Poisson é definido por*

$$P_r(\psi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\psi + r^2}.$$

Teorema 1.2. *(Forma integral de Poisson) Se f está em H^2 e re^{it} está em $\mathbb{D}$, então*

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta})P_r(\theta - t)d\theta.$$

Definição 1.6. *Uma função mensurável $\phi \in S^1$ é essencialmente limitada se existe algum M_0, tal que a medida de $\{e^{i\theta};\ |\phi(e^{i\theta})| > M_0\}$ é 0. o espaço L^∞ é a coleção de todas as funções essencialmente limitadas. A norma essencial de uma função $\phi \in L^\infty$, denotada por $\|\phi\|_\infty$, é definida por*

$$\|\phi\|_\infty = \inf\{M : \textit{a medida de } \{e^{i\theta} :\ |\phi(e^{i\theta})| > M\} \textit{ é 0}\}.$$

Uma função $f \in H^2$, tal que $\widetilde{f} \in L^\infty$, então $f \in H^\infty$.

1.2 Operadores de Composição

Definição 1.7. *Para cada função analítica ϕ que aplica o disco unitário nele mesmo, definimos o operador de composição C_ϕ por*

$$(C_\phi f)(z) = f(\phi(z))$$

para todo $f \in H^2$.

Dessa definição temos que se $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ é analítica, então o operador de composição C_ϕ é bem definido e limitado sobre H^2. Além disso

$$\|C_\phi\| \leqslant \sqrt{\frac{1 + |\phi(0)|}{1 - |\phi(0)|}}.$$

Proposição 1.3. *Se C_ϕ e C_ψ são operadores de composição então $C_\phi C_\psi = C_{\psi\circ\phi}$.*

Demonstração. Sejam ϕ, ψ funções analíticas que aplicam o disco unitário nele mesmo, e $f \in H^2$, temos que $C_\phi C_\psi f = C_\phi f \circ \psi = f \circ \psi \circ \phi = C_{\psi\circ\phi} f$ □

O adjunto de um operador de composição geralmente é desconhecido, mas para o caso dos núcleos de reprodução temos:

Proposição 1.4. *Se* C_ϕ *é um operador de composição e* k_λ *é núcleo de reprodução, então*

$$C_\phi^* k_\lambda = k_{\phi(\lambda)}.$$

Demonstração. Seja $f \in H^2$,

$$\langle f, C_\phi^* k_\lambda \rangle = \langle C_\phi f, k_\lambda \rangle = f(\phi(\lambda)).$$

Mas, também

$$\langle f, k_{\phi(\lambda)} \rangle = f(\phi(\lambda))$$

Portanto temos que $C_\phi^* k_\lambda = k_{\phi(\lambda)}$. □

Proposição 1.5. *Se* C_ϕ *é um operador de composição então*

$$\frac{1}{\sqrt{1 - |\phi(0)|^2}} \leqslant \|C_\phi\| \leqslant \frac{2}{\sqrt{1 - |\phi(0)|^2}}.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.4, temos que

$$C_\phi^* k_0 = k_{\phi(0)}.$$

Por

$$\|k_\lambda\|^2 = \frac{1}{1 - \lambda^2},$$

temos que $\|k_0\| = 1$ e $\|k_{\phi(0)}\| = 1/\sqrt{1 - |\phi(0)|^2}$. Como

$$\|k_{\phi(0)}\| = \|C_\phi^* k_0\| \leqslant \|C_\phi^*\| \|k_0\|,$$

segue-se que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - |\phi(0)|^2}} \leqslant \|C_\phi^*\| = \|C_\phi\|.$$

Sabemos que $\|C_\phi\| \leqslant \sqrt{\dfrac{1 + |\phi(0)|}{1 - |\phi(0)|}}$.

Observamos que para $0 \leqslant r < 1$, temos que

$$\sqrt{\frac{1+r}{1-r}} = \sqrt{\frac{(1+r)^2}{1-r^2}} = \frac{1+r}{\sqrt{1-r^2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Portanto

$$\|C_\phi\| \leqslant \sqrt{\frac{1 + |\phi(0)|}{1 - |\phi(0)|}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1 - |\phi(0)|^2}}.$$

□

Proposição 1.6. *A norma de um operador de composição* C_ϕ *é* 1 *se e somente se* $\phi(0) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que $\phi(0) = 0$, como

$$\|C_\phi\| \leqslant \sqrt{\frac{1 + |\phi(0)|}{1 - |\phi(0)|}},$$

temos que $\|C_\phi\| \leqslant 1$. Seja f uma função constante, então pela Proposição 1.2, $f \in H^2$, e como $C_\phi f = f \circ \phi = f$, temos que $\|C_\phi\| \geqslant 1$, portanto $\|C_\phi\| = 1$.

Suponhamos que $\|C_\phi\| = 1$, como

$$\frac{1}{\sqrt{1 - |\phi(0)|^2}} \leqslant \|C_\phi\|,$$

temos que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - |\phi(0)|^2}} \leqslant 1,$$

portanto $\phi(0) = 0$.

□

1.3 Automorfismos de Disco Hiperbólico

Definição 1.8. *Um automorfismo ϕ em $\mathbb{D}$ é da forma*

$$\phi(z) = \lambda \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}$$

para algum $a \in \mathbb{D}$ e λ tendo módulo 1.

Teorema 1.3. *Seja ϕ um automorfismo de $\mathbb{D}$ diferente da identidade, então ϕ tem no máximo dois pontos fixos no plano complexo. Além disso ϕ tem um ponto fixo em $\mathbb{D}$ e nenhum em S^1 ou ϕ tem todos os pontos fixos em S^1.*

Demonstração. A equação $\phi(z) = z$ é uma equação linear ou quadrática, assim ϕ tem no máximo dois pontos fixos no plano complexo.

Seja $\phi(z) = \lambda \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$. Se $\phi(0) = 0$, então $a = 0$ e o único ponto fixo de ϕ é 0. Se $\phi(z_0) = z_0$, com $z_0 \neq 0$, então

$$\phi\left(\frac{1}{\overline{z_0}}\right) = \lambda\left(\frac{a - \frac{1}{\overline{z_0}}}{1 - \overline{a}\frac{1}{\overline{z_0}}}\right) = \overline{\left(\frac{1}{\lambda\left(\frac{a - z_0}{1 - \overline{a}z_0}\right)}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{z_0}\right)} = \frac{1}{\overline{z_0}}.$$

Portanto $\dfrac{1}{\overline{z_0}}$ também é um ponto fixo neste caso. Assim se ϕ tem um ponto fixo em $\mathbb{D}$ diferente de 0, então ϕ tem um ponto fixo fora de $\overline{\mathbb{D}}$, o teorema segue. □

Definição 1.9. *Seja ϕ um automorfismo de $\mathbb{D}$ diferente da identidade. Se ϕ tem um ponto fixo em $\mathbb{D}$, então ϕ é dito ser elíptico. Se ϕ não tem um ponto fixo em $\mathbb{D}$ e tem somente um ponto fixo em S^1, então ϕ é dito ser parabólico. Se ϕ tem dois pontos fixos em S^1, então ϕ é dito ser hiperbólico.*

Lema 1.1. *Seja ϕ um automorfismo de $\mathbb{D}$ hiperbólico satisfazendo $\phi(1) = 1$ e $\phi(-1) = -1$. Então existe um número real α entre -1 e 1, tal que*

$$\phi(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Além disso, $\phi'(1) = \dfrac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$ e $\phi'(-1) = \dfrac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$, um dos números positivos $\phi'(1)$ e $\phi'(-1)$ é menor que 1 e o outro é maior que 1.

Demonstração. Por ϕ ser um automorfismo de $\mathbb{D}$ há um $\alpha \in \mathbb{D}$ e um $\lambda \in \mathbb{C}$ de módulo 1, tal que

$$\phi(z) = \lambda \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$$

Como $\phi(1) = 1$ e $\phi(-1) = -1$, temos que $\lambda(\alpha - 1) = 1 - \overline{\alpha}$ e $\lambda(\alpha + 1) = -1 - \overline{\alpha}$, segue-se que

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \frac{\overline{\alpha} - 1}{\overline{\alpha} + 1},$$

assim $\dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ é real e portanto α é real.

Por $\phi(1) = 1$, temos $\lambda(\alpha - 1) = 1 - \alpha$, assim $\lambda = -1$ e então

$$\phi(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z} \text{ e } \phi'(z) = \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha z)^2}.$$

Portanto $\phi'(1) = \dfrac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$ e $\phi'(-1) = \dfrac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$.

Como $\alpha \in (-1, 1)$, temos que $\phi'(1)$ e $\phi'(-1)$ são positivos. Se $\phi'(1) = 1$ ou se $\phi'(-1) = 1$, então $\alpha = 0$ e portanto $\phi(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por $\phi'(1)\phi'(-1) = 1$, temos que $0 < \phi'(1) < 1$ e $\phi'(-1) > 1$ ou $\phi'(1) > 1$ e $0 < \phi'(-1) < 1$. □

Lema 1.2. *Seja ϕ um automorfismo de $\mathbb{D}$ hiperbólico satisfazendo $\phi(1) = 1$ e $\phi(-1) = -1$. Se $\Gamma(z) = i\dfrac{1 + z}{1 - z}$ e a função G é definida por $\Gamma \circ \phi \circ \Gamma^{-1}$, então há um $\gamma > 0$, tal que $G(z) = \gamma z$, para todo z no semiplano superior, além disso, $\gamma = \phi'(-1)$.*

Demonstração. Observe que G é um automorfismo do semiplano superior e que G aplica a linha real estendida nela mesma. Também

$$G(0) = \Gamma(\phi(-1)) = \Gamma(-1) = 0 \text{ e } \Gamma(\infty) = \Gamma(\phi(1)) = \Gamma(1) = \infty.$$

Como G é uma transformação fracionária linear, deve ter a forma

$$G(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Por $G(\infty) = \infty$, devemos ter $c = 0$, assim G é da forma

$$G(z) = \gamma z + \delta$$

e como $G(0) = 0$, então $\delta = 0$. Como G é um automorfismo do semiplano superior γ deve ser um número real positivo.

Por $G \circ \Gamma = \Gamma \circ \phi$, temos

$$G'(\Gamma(-1))\Gamma'(-1) = \Gamma'(\phi(-1))\phi'(-1)$$

e assim

$$\gamma\Gamma'(-1) = \Gamma'(-1)\phi'(-1).$$

Um cálculo simples mostra que $\Gamma'(-1) \neq 0$, portanto $\gamma = \phi'(-1)$. □

Definição 1.10. *Seja X um espaço de Banach, denotamos por $B(X)$ o espaço dos operados lineares limitados $T : X \to X$.*

Definição 1.11. *Seja X um espaço de Banach e $T \in B(X)$, o raio espectral de T é definido por $r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.*

Lema 1.3. *Seja $a \in (-1, 1)$ e $\phi(z) = \dfrac{z-a}{1-az}$. Então*

$$r(C_\phi) = \sqrt{\phi'(1)} = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}},$$

se $a \geqslant 0$, e

$$r(C_\phi) = \sqrt{\phi'(-1)} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}},$$

se $a \leqslant 0$.

Demonstração. Da Proposição 1.5.

$$\frac{1}{\sqrt{1-|\phi(0)|^2}} \leqslant \|C_\phi\| \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-|\phi(0)|^2}}.$$

Mais geralmente, para todo número natural n,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-|\phi^n(0)|^2}}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \|C_\phi^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{1-|\phi^n(0)|^2}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Por $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$, Temos que

$$r(C_\phi) = \lim_{n\to\infty} \|C_\phi^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1-|\phi^n(0)|^2}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Como no Lema 1.2, definimos $G = \Gamma \circ \phi \circ \Gamma^{-1}$. Pelo Lema 1.2. $G(z) = \gamma z$, para algum $\gamma > 0$.

Claramente $G^n(z) = \gamma^n z$, para todo número natural n. Por $\Gamma^{-1}(i) = 0$, temos

$$\phi^n(0) = \phi^n(\Gamma^{-1}(i)) = \Gamma^{-1}(G^n(i)) = \Gamma^{-1}(\gamma^n i) = \frac{\gamma^n i - i}{\gamma^n i + i} = \frac{\gamma^n - 1}{\gamma^n + 1}.$$

Segue que

$$1 - |\phi^n(0)|^2 = 1 - \left|\frac{\gamma^n - 1}{\gamma^n + 1}\right|^2 = \frac{(\gamma^n+1)^2 - (\gamma^n-1)^2}{(\gamma^n+1)^2} = \frac{4\gamma^n}{(\gamma^n+1)^2}.$$

Usando a formula para o raio espectral obtida acima, obtemos

$$r(C_\phi) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1-|\phi^n(0)|^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\gamma^n+1)^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \lim_{n\to\infty} (\gamma^n+1)^{\frac{1}{n}},$$

pois $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$.

Consideraremos dois casos: o caso onde $0 < \gamma < 1$ e o caso $\gamma > 1$. (Observe que $\gamma = 1$ corresponde o caso no qual ϕ é a identidade).

Se $0 < \gamma < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} (\gamma^n + 1)^{\frac{1}{n}} = 1$, e assim

$$r(C_\phi) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}.$$

Se $\gamma > 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} (\gamma^n + 1)^{\frac{1}{n}} = \gamma$, e assim

$$r(C_\phi) = \sqrt{\gamma}.$$

Pelo Lema 1.2, $\gamma = \phi'(-1)$, e pelo Lema 1.1, $\phi'(-1) = \dfrac{1-a}{1+a}$. Portanto $\gamma = \dfrac{1-a}{1+a}$.

Se $a \leqslant 0$, então $\gamma \geqslant 1$, e portanto

$$r(C_\phi) = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}.$$

Se $a \geqslant 0$, então $\gamma \leqslant 1$, e portanto

$$r(C_\phi) = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$

$\square$

Teorema 1.4. *Se ϕ é automorfismo de $\mathbb{D}$ hiperbólico, então ϕ tem um único ponto fixo α tal que $0, \phi'(\alpha) < 1$. O espectro de C_ϕ é dado por*

$$\sigma(C_\phi) = \left\{ z : \sqrt{\phi'(\alpha)} \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\phi'(\alpha)}} \right\}.$$

Além disso, todo ponto de

$$\left\{ z : \sqrt{\phi'(\alpha)} < |z| < \frac{1}{\sqrt{\phi'(\alpha)}} \right\}.$$

é um autovalor de C_ϕ.

Demonstração. Começamos reduzindo para o caso no qual os pontos fixos são -1 e 1.

Suponha que $\phi(\beta) = \beta$ e $\phi(\delta) = \delta$. Seja T um automorfismo em $\mathbb{D}$, tal que $T(1) = \beta$ e $T(-1) = \alpha$. Definimos ψ por, $\psi = T^{-1} \circ \phi \circ T$. Então ψ é um automorfismo de $\mathbb{D}$ hiperbólico satisfazendo $\psi(1) = 1$ e $\psi(-1) = -1$, assim C_ψ é similar a C_ϕ, $\sigma(C_\psi) = \sigma(C_\phi)$ e $\Pi_0(C_\psi) = \Pi_0(C_\phi)$. Além disso, $\psi'(1) = \phi'(\beta)$ e $\psi'(-1) = \phi'(\delta)$. Pelo Lema 1.1, um dos $\psi'(1)$ e $\psi'(-1)$ está ente 0 e 1. Seja α igual a β ou δ de modo que $\phi'(\alpha)$ está entre 0 e 1.

Assim é suficiente provar que o teorema é válido para automorfismo ϕ de $\mathbb{D}$ hiperbólico cujos pontos fixos são 1 e -1. Suponhamos então que $\phi(1) = 1,\ \phi(-1) = -1$ e $\phi'(1)$ está entre 0 e 1.

Pelo Lema 1.3, $r(C_\phi) = \sqrt{\phi'(-1)} = \dfrac{1}{\sqrt{\phi'(1)}}$. Então

$$\sigma(C_\phi) \subset \left\{ z : |z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\phi'(1)}} \right\}.$$

Claramente ϕ^{-1} é também um automorfismo de $\mathbb{D}$ hiperbólico com pontos fixos 1 e -1. Além disso, $(\phi^{-1})'(-1) = \dfrac{1}{\phi'(-1)}$, assim o Lema 1.3 implica

$$r(C_{\phi^{-1}}) = \frac{1}{\sqrt{(\phi^{-1})'(-1)}} = \sqrt{\phi'(-1)} = \frac{1}{\phi'(1)}.$$

Como $C_{\phi^{-1}} = C_\phi^{-1}$ e $\sigma(C_\phi^{-1}) = \left\{ \dfrac{1}{z} : z \in \sigma(C_\phi) \right\}$, então $z \in \sigma(C_\phi)$ implica que

$$\frac{1}{|z|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\phi'(1)}}.$$

Segue-se que $|z| \geqslant \sqrt{\phi'(1)}$ para todo $z \in \sigma(C_\phi)$, assim $\sigma(C_\phi)$ está contido no anel $\{z; \sqrt{\phi'(1)} \leqslant |z| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\phi'(1)}}\}$.

A prova do teorema estará completa se mostrarmos que todo ponto do anel aberto

$$\left\{ z : \sqrt{\phi'(1)} < |z| < \frac{1}{\sqrt{\phi'(1)}} \right\}$$

é um autovalor de C_ϕ.

Consideremos um número s qualquer, tal que $s \in (-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$ e um número real t qualquer. Seja

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{s+it}$$

(onde a potência é definida em termo do ramo principal do logaritmo). Mostraremos que cada f dessa forma é um autovalor de C_ϕ e, além disso que os correspondentes autovalores assume todos os valores complexos do anel aberto $\{z; \sqrt{\phi'(1)} < |z| < 1/\sqrt{\phi'(1)}\}$ quando s varia em $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$ e t varia em $\mathbb{R}$.

Primeiro mostramos que cada função f pertence a H^2. Observamos que

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{s} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{it},$$

por

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{it}$$

pertencer a H^∞ (MARTÍNEZ-AVENDAÑO; ROSENTHAL, 2007, p. 11), é suficiente provar que a função

$$g(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{s}$$

pertence a H^2 para todo $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Para $s = 0$ não há nada a se provar. Se $s \in (0, \frac{1}{2})$, então $\frac{1}{(1-z)^s} \in H^2$ (MARTÍNEZ-AVENDAÑO; ROSENTHAL, 2007, p. 8) e $(1+z)^s$ claramente pertence a H^∞, assim $g \in H^2$.

Para $s \in (-\frac{1}{2}, 0)$,

$$g(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{-s}$$

a função $(1-z)^{-s}$ claramente pertence a H^∞. O resultado do exemplo x implica que $\left(\frac{1}{1+z}\right)^{-s} \in H^2$, portanto $g \in H^2$ para todo $s \in (-\frac{1}{2}, 0)$. assim

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{s+it}$$

está em H^2 para todo $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora calcularemos $C_\phi f$.

Por ϕ tem pontos fixos 1 e -1, existe $\alpha \in (-1, 1)$, tal que

$$\phi(z) = \frac{z-\alpha}{1-\alpha z}$$

Usando essa forma para ϕ, temos

$$\frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)} = \frac{(1-\alpha)+(1-\alpha)z}{(1+\alpha)-(1+\alpha)z} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{1+z}{1-z}.$$

Segue-se que

$$(C_\phi f)(z) = (f \circ \phi)(z) = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{1+z}{1-z}\right)^{s+it} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{s+it} f(z),$$

portanto cada f é um autovetor de C_ϕ e o autovalor correspondente de f é

$$\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{(s+it)}.$$

Observe que $\phi'(1) = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$. Resta mostrar que a função λ definida por

$$\lambda(s,t) = \left(\frac{1}{\phi'(1)}\right)^{s+it}$$

assume todos os valores no anel aberto $\{z; \sqrt{\phi'(1)} < |z| < \dfrac{1}{\sqrt{\phi'(1)}}\}$ quando s varia em $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e t varia em $\mathbb{R}$. Observamos que

$$\lambda(s,t) = \left(\frac{1}{\phi'(1)}\right)^{s}\left(\frac{1}{\phi'(1)}\right)^{it}.$$

Quando t varia sobre todos os números reais, a função

$$\left(\frac{1}{\phi'(1)}\right)^{it}.$$

varia sobre todos os números complexos de módulo 1. Quando s varia sobre o intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, a função

$$\left(\frac{1}{\phi'(1)}\right)^{s}$$

varia sobre o intervalo $\left((\phi'(1))^{\frac{1}{2}}, \left(\dfrac{1}{\phi'(1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$.

Por o produto de cada autovalor com todos os números complexos de módulo 1 é também um autovalor, segue que todo ponto no anel aberto é um autovalor de C_ϕ. $\square$

2 O Problema do Subespaço Invariante para Espaços de Hilbert

Na primeira seção deste capítulo será feita uma discussão sobre o problema do subespaço invariante, citaremos para quais casos particulares o problema tem uma solução e na segunda seção introduziremos o conceito de operador universal e demonstraremos um resultado que relaciona o conceito de operador universal com o problema do subespaço invariante. As principais referências são (ENFLO, 1976), (CARADUS, 1969), (LOMONOSOV, 1973).

2.1 O Problema do Subespaço Invariante

O problema do subespaço invariante pode ser enunciado como o seguinte questionamento "Todo operador linear limitado não nulo T em um espaço de Banach tem um subespaço invariante não trivial?". O termo subespaço invariante significa um subespaço fechado de H que o operador T aplica o subespaço nele mesmo, não trivial significa diferente de $\{0\}$ e H. Esse problema é facilmente enunciável, porém ainda se encontra parcialmente em aberto e é desconhecido quem foi o primeiro a enunciá-lo.

Para um espaço de Banach complexo a resposta é negativa, já que Per H. Enflo propôs um contraexemplo em 1975 (ENFLO, 1976). O artigo completo foi entregue em 1981, mas devido a sua complexidade foi publicado somente em 1987 (ENFLO, 1987).

Proposição 2.1. *Seja T um operador linear limitado não nulo sobre um espaço de Hilbert H. Se T tem um autovalor λ, então T possui um subespaço invariante não trivial.*

Demonstração. Se $T = \lambda I$, temos que todo subespaço fechado de H é invariante por T.

Se $T \neq \lambda I$, então existe $x \in H$, tal que $Tx \neq \lambda x$, assim $x \notin N(T-\lambda)$, portanto $N(T-\lambda)$ é um subespaço próprio de H. A continuidade de $T-\lambda$ implica que $N(T-\lambda) = (T-\lambda)^{-1}\{0\}$ seja fechado em H. Se $x \in N(T-\lambda)$, então $Tx = \lambda x$, e $(T-\lambda)Tx = 0$. Por λ ser um autovalor de T, temos que $N(T-\lambda) \neq \{0\}$, assim temos que $N(T-\lambda)$ é um subespaço invariante não trivial de T. □

Corolário 2.1. *Se H é um espaço complexo de dimensão finita então todo operador linear T em H tem um subespaço invariante não trivial.*

Demonstração. Como todo operador linear T sobre um espaço complexo de dimensão finita n é similar a um operador M sobre $\mathbb{C}^n$, temos que T possui um autovalor, e pela Proposição 2.1, temos que T possui um subespaço invariante não trivial. $\square$

Proposição 2.2. *Todo operador linear limitado não nulo T em um espaço de Hilbert não-separável tem um subespaço invariante não trivial.*

Demonstração. Suponhamos que H é um espaço de Hilbert não-separável. Seja T um operador linear limitado em H. Tomamos um vetor não nulo x e consideramos o subespaço fechado M gerado pelos vetores $\{x, Tx, T^2x, ...\}$. Então M é invariante sobre T e obviamente $M \neq \{0\}$. Além disso, M não coincide com H, pois isso contradiria o fato de H ser separável. Assim todo operador T sobre um espaço de Hilbert não-separável tem um subespaço invariante não-trivial. $\square$

Um dos mais antigos resultados sobre subespaços invariantes é o teorema de Aronszajn e Smith (ARONSZAJN; SMITH, 1954), publicado em 1954. Dele temos que todo operador compacto tem um subespaço invariante não trivial. Um resultado mais forte, foi apresentado por Lomonosov em 1973 (LOMONOSOV, 1973).

Definição 2.1. *Seja X um espaço de Banach, $T \in B(X)$. Um subespaço $M \subset X$ é dito ser invariante em relação a T, se M for invariante para todo $S \in B(X)$, tal que $ST = TS$.*

Lema 2.1. *Seja X um espaço de Banach. O espaço $B(X)$ é uma álgebra com o produto sendo a composição de operadores. Seja $\mathbb{A}$ uma subágebra de $B(X)$, tal que*

$$\bigcap_{A \in \mathbb{A}} LatA = \{\{0\}, X\},$$

então, para qualquer operador compacto $K \in B(X) \backslash \{0\}$, existe $A \in \mathbb{A}$ e um $x_0 \in X \backslash \{0\}$, tal que $KAx_0 = x_0$.

Demonstração. Para $y \in X$, consideremos $B_1(y)$, a bola aberta de centro y e raio 1. Por K não ser idendicamente nulo, existe um $y \in X$, tal que $C = \overline{B_1(y)}$ não contém o 0. Seja $x \in X$, consideremos $\mathbb{A}x = \{Sx : S \in \mathbb{A}\}$, como $\bigcap_{A \in \mathbb{A}} LatA = \{\{0\}, X\}$, temos que $\overline{\mathbb{A}x} = X$, para todo $x \neq 0$. Por $0 \notin C$, tem-se que $\overline{\mathbb{A}x} = X$, para todo $x \in C$, portanto $\mathbb{A}x \cap B_1(y) \neq \varnothing$, para todo $x \in C$. Então

$$C \subset \bigcup_{A \in \mathbb{A}} A^{-1}(B_1(y)).$$

Por C ser compacto, existe um subconjunto finito $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de $\mathbb{A}$, tal que

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i^{-1}(B_1(y))$$

Seja $r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma aplicação contínua, tal que $r^{-1}(\{0\}) = [1, +\infty)$. Definimos $f : C \to B_1(y)$ por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r(\|A_i x - y\|)}{\sum\limits_{j=1}^{n} r(\|A_j x - y\|)} A_i x.$$

A função f está bem definida, pois para todo $x \in C$, existe um i, com $0 \leqslant i \leqslant n$, tal que $A_i x \in B_1(y)$, e assim $r(\|A_i x - y\|) > 0$. Consideremos $F = K \circ f$, pelo Teorema 1.1.22 de (CHALENDAR; PARTINGTON, 2011, p. 14), existe $x_0 \in C$, tal que $F(x_0) = x_0$. Definimos $A \in \mathbb{A}$, por

$$Au = \sum_{i=1}^{n} \frac{r(\|A_i x_0 - y\|)}{\sum\limits_{j=1}^{n} r(\|A_j x_0 - y\|)} A_i u.$$

Vemos facilmente que $Ax_0 = f(x_0)$ e que $KAx_0 = F(x_0) = x_0$ com $x_0 \neq 0$, por $x_0 \in C$. □

Teorema 2.1. *(Lomonosov) Seja $T \in B(x) \backslash \mathbb{C}I$. Suponha que existe um operador compacto não nulo K, tal que $TK = KT$. Então T tem um subespaço hiperinvariante não trivial.*

Demonstração. Suponhamos que a álgebra $\mathbb{A} = \{A \in B(x) : \ AT = TA\}$ não possui subespaço invariante não trivial. Então pelo Lema 2.1 existe $A \in \mathbb{A}$, tal que

$$Ker(I - KA) \neq \{0\}.$$

Como KA é compacto, a dimensão de $Ker(I - KA)$ é finita, e por $KA \in \mathbb{A}$, temos que T possui um subepaço invariante não trivial, assim T possui um autovalor, então por todo autoespaço de T pertencer a $\bigcap\limits_{A \in \mathbb{A}} LatA$, temos uma contradição. □

Até o presente momento não se sabe se todo operador linear limitado sobre um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita possui um espaço invariante não trivial, assim o problema do subespaço invariante pode ser enunciado como:

Problema do Subespaço Invariante Todo operador linear limitado não nulo T em um espaço de Hilbert separável tem um subespaço invariante não trivial.

2.2 Operador Universal

Esta seção é baseada no artigo (CARADUS, 1969).

Definição 2.2. *Para qualquer espaço de Banach X, seja $B(X)$ o espaço dos endomorfismos contínuos de X. Um operador $U \in B(X)$ é chamado de universal se, dado qualquer $T \in B(X)$, um múltiplo não nulo de T é similar a uma parte de U, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$\lambda \neq 0$, um subespaço fechado $X_0 \subseteq X$, tal que $UX_0 \subseteq X_0$ e um homeomorfismo linear ϕ de X em X_0, tal que $\lambda T = \phi^{-1}(U/X)\phi$.

Teorema 2.2. *Seja X um espaço de Hilbert separável e seja $U \in B(X)$. Se U tem as seguintes propriedades:*

1. *O núcleo de U $(N(U))$ tem dimensão infinita*

2. *A imagem de U $(R(U))$ é o espaço X*

então U é universal.

Demonstração. Iniciamos construindo operadores, V, W em $B(X)$, tais que $UV = I$, $UW = 0$, $N(W) = (0)$, $R(W)$ é fechado e $R(W) \perp R(V)$. Para isto, consideremos $\tilde{U}$ como a restrição de U em $N(U)^{\perp}$ e definimos $V = \tilde{U}^{-1}$. Tomamos uma base ortonormal $\{e_n\}$ para X e uma base ortonormal $\{e'_n\}$ para $N(U)$ e definimos $We_n = e'n$. É obvio que V e W tem as propriedades requiridas. Seja T qualquer operador em $B(X)$. Escolha λ tal que $|\lambda|\|T\|\|V\| < 1$ e defina $\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k V^k W T^k$. Pela escolha de λ, esta série converge em $B(X)$. É também evidente que

1. $U\phi = \lambda\phi T$

2. $\phi = \lambda V\phi T$

De (1) temos que $R(\phi)$ é U-invariante. Para finalizar a prova resta mostrar que ϕ é um homeomorfismo. Suponhamos que $\phi(x) = 0$, então por $R(W) \perp R(V)$, temos que $V\phi Tx = Wx = 0$. Como W é invertivel temos que $x = 0$, assim $\phi : X \to R(\phi)$ é um isomorfismo.

Consideremos $(x_n) \in X$, tal que $\phi(x_n) \to y$. De (2), temos que $\lambda V\phi Tx_n + Wx_n \to y$. Portanto $Wx_n \to Py$, onde P é a projeção ortogonal em $R(W)$. Como $R(W)$ é fechado, existe x, tal que $Wx_n \to x$. Logo $x_n \to x$ e por conseguinte $\phi(x_n) \to \phi(x) = y$. Portanto $R(\phi)$ é um espaço de Hilbert e pelo Teorema da Aplicação Aberta ϕ é uma aplicação aberta e portanto um homeomorfismo. □

O próximo teorema estabelece uma relação entre o conceito de operador universal e o problema dos subespaços invariantes.

Teorema 2.3. *Sejam X um espaço de Hilbert e $U \in B(X)$ um operador universal, então são equivalentes:*

1. *Todo $T \in B(X)$ não-nulo, possui um subespaço invariante não trivial.*

2. *Para todo $M \subset X$, subespaço invariante por U, e isomorfo a X, o operador $U|_M$ possui um subespaço invariante não trivial.*

Demonstração. Se $M \subset X$, é um subespaço invariante por U, e isomorfo a X, temos pelo item (1) que $U|_M$ possui um subespaço invariante não trivial, por X e M serem isomorfos.

Se $T \in B(X)$ é não nulo, então existe λ não nulo e $M \subset X$, tal que M é ivariante por U, isomorfo a X e T é similar a $\lambda U|_M$, assim T possui um subespaço invariante não trivial. $\square$

3 Operador de Composição Hiperbólico

Neste capítulo será mostrado que $C_\phi - \lambda I$ é universal, para todo $\lambda \in \sigma(C_\phi)$, onde C_ϕ é um operador de composição induzido por um automorfismo de disco hiperbólico. Reformularemos o problema do subespaço invariante em função do operador de composição hiperbólico, e na terceira seção desse capítulo, motivados pela reformulação do problema do subespaço invarinte, mostraremos alguns resultados independentes. As principais referências são (MARTÍNEZ-AVENDAÑO; ROSENTHAL, 2007), (MATACHE, 1993), (CHALENDAR; PARTINGTON, 2011) e (CHKLIAR, 1997).

3.1 Bilateral weighted shift

Definição 3.1. *Seja $\{e_n\}$ uma base ortonormal de $l^2(\mathbb{Z})$, e $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, uma sequência de números estritamente positivos, com $w_n \to a$ quando $n \to -\infty$ e $w_n \to b$ quando $n \to \infty$, onde chamamos os w_n de pesos. Definimos a bilateral weighted shift T por*

$$Te_n = w_n e_{n+1}.$$

Observações

1. Uma bilateral weighted shift com pesos complexos é unitariamente equivalente a uma bilateral weighted shift com peso estritamente positivo.
2. Quando $a \neq b$ o operador T^{-1} é equivalente a uma bilateral weighted shift, com pesos $w'_n = w^{-1}_{-n}$, com $w'_n \to \dfrac{1}{b}$ quando $n \to -\infty$ e $w'_n \to \dfrac{1}{a}$ quando $n \to \infty$.
3. $T^*e_n = w_{n-1}e_{n-1}$, assim T^* é unitariamente equivalente para uma bilateral weighted shift com os pesos tendendo a b quando $\to -\infty$ e a a quando $\to \infty$.

Proposição 3.1. *Seja T a bilateral weighted shift definida na Definição 3.1. Então $\sigma(T) = \sigma(T^*) = \{z \in \mathbb{C}; a \leqslant |z| \leqslant b\}$. Se $a < b$, então para todo $a < |\lambda| < b$, tem-se que λ é um autovalor de T^*, mas λ não é autovalor e nem autovalor aproximado de T.*

Demonstração. Suponhamos que $a > 0$, com um cálculo simples verifica-se que

$$\sup_{m\in Z}(w_m w_{m+1} ... w_{m+n-1})^{\frac{1}{n}} = b$$

quando $n \to \infty$, e dai temos que $\|T^n\|^{\frac{1}{n}}_{B(l^2(\mathbb{Z}))} \to b$. Por T^{-1} ser similar a uma bilateral weighted shift, um argumento semelhante mostra que $\|T^{-n}\|^{\frac{1}{n}}_{B(l^2(\mathbb{Z}))} \to \dfrac{1}{a}$. Então temos que

$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C}; a \leqslant |z| \leqslant b\}$. Como $\sigma(T^*) = \sigma(T)$, temos que $\sigma(T^*) \subset \{z \in \mathbb{C}; a \leqslant |z| \leqslant b\}$.

Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ com $a < |\lambda| < b$, e $x = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x_n e_n$. Se $T^*x = \lambda x$, teremos

$$\lambda \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x_n e_n = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x_n w_{n-1} e_{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x_{n+1} w_n e_n$$

Logo, $\lambda x_n = w_n x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolhendo $x_0 = 1$, teremos

$$x_n = \frac{\lambda^n}{w_0 w_1 ... w_{n-1}},\ n > 0$$

e

$$x_n = \lambda^n w_n w_{n+1} ... w_{-1},\ n < 0$$

Por $a < |\lambda| < b$, temos que a solução descrita acima está em $l^2((Z))$. Consequentemente $\sigma(T) = \sigma(T^*) = \{z \in \mathbb{C} : a \leqslant |Z| \leqslant b\}$.

Por contradição supomos que para cada $k = 1, 2, 3, ...$ exista um vetor unitário $x(k) = \{x_n(k)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, tal que

$$|Tz(k) - \lambda x(k)| < \frac{1}{k}.$$

Caso $\liminf_{k \to \infty} |x_0(k)| = 0$, tem-se que para cada $\epsilon > 0$, encontramos um k, tal que, $|x_0(k)| < \epsilon$ e $|Tx(k) - \lambda x(K)| < \epsilon$. Substituindo $x(k)$ por $x'(k) = x(k) - x_0(k)e_0$, temos que

$$|Tx'(k) - \lambda x'(k)| \leqslant |Tx(k) - \lambda x(k)| + |Tx_0(k)e_0 - \lambda x_0(k)e_0| < \epsilon + (\|T\|_{B(l^2(\mathbb{Z}))} + |\lambda|)\epsilon$$

Então podemos encontrar autovetores aproximados $x'(k)$, com norma 1, tal que, $x'_0(k) = 0$ e $|Tx'(k) - \lambda x'(k)| \to 0$.

Note agora que $x'(k) = u(k) + v(k)$, com $u(k) = \sum_{n=-\infty}^{-1} u_n(k) e_n$ e $v(k) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(k) e_n$. Logo $Tx'(k) - \lambda x'(k)$ é a soma ortogonal de $Tu(k) - \lambda u(k)$ e $Tv(k) - \lambda v(k)$. Segue-se que podemos encontrar uma sequência de autovetores aproximados da forma $x(k) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x_n(k) e_n$ ou da forma $x(k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(k) e_n$.

Seja x um vetor com norma 1, tal que $|Tx - \lambda x| < \frac{1}{k}$, temos

$$T^n x - \lambda^n x = (T^{n-1} + \lambda T^{n-2} + ... + \lambda^{n-1} I)(Tx - \lambda x)$$

e então $|T^n x - \lambda^n x| < \dfrac{C_n}{k}$, onde C_n não depende de k. Se $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, então para n suficientemente grande

$$|T^n x| \geqslant \inf_{k>0}(w_k w_{k+1}...w_{k+n-1}) > |\lambda^n| + 2$$

Assim, se escolhermos um k maior que C_n, teremos uma contradição.

Para o caso onde $x = \sum_{n=-\infty}^{-1} x_n e_n$, um argumento similar usando T^{-1}, nos leva a concluir que T não possui autovetores aproximados.

Caso $x(k)$ é uma sequencia de autovetores aproximados, tal que $\liminf_{k\to\infty} |x_0(k)| = d$, com $d \neq 0$, observamos que se $x = \{x_n\}$, tem norma 1, e $|Tx - \lambda x| \leqslant \dfrac{1}{m}$, com um simples argumento indutivo podemos mostrar que existem contantes D_n, independentes de m, tal que

$$\left| x_{n+1} - \frac{w_0 w_1 ... w_n}{\lambda^{n+1}} \right| \leqslant \frac{D_n}{m},\ n = 0, 1, 2...$$

Portanto se $|x_0| \geqslant \dfrac{d}{2}$, usamos o fato que $\dfrac{w_0 w_1 ... w_n}{\lambda n + 1} \to \infty$, para encontrar n, tal que, $|x_{n+1}| > 2 - \dfrac{D_n}{m}$. Assim, se m é maior que D_n, teremos uma contradição. $\square$

3.2 Universalidade do Operador de Composição Hiperbólico

Nesta seção consideraremos o operador de composição C_ϕ, com ϕ sendo um automorfismo de disco hiperbólico. Sem perda de generalidade, podemos considerar $\phi(z) = \dfrac{z + r}{1 + rz}$, com $0 < r < 1$.

Considerando $z_n = \phi^n(0)$ e $a = \dfrac{1 - r}{1 + r}$, vemos facilmente que

$$z_n = \frac{1 - a^n}{1 + a^n},$$

e temos então que $z_{-n} = -z_n$.

Por ϕ^n ser uma composição de automorfismos do disco, temos que ϕ^n é um automorfsimo do disco, assim para todo $z \in \mathbb{D}$, temos que $\phi^n(z) = \lambda \dfrac{a - z}{1 - \overline{a} z}$, com $\lambda \in S^1$, $a \in \mathbb{D}$. Como $\phi^n(0) = z_n$ e $\phi^n(z_{-n}) = 0$, temos que

$$\phi^n(z) = \frac{z_n}{z_{-n}} \frac{z_{-n} - z}{1 - \overline{z_{-n}} z} = -\frac{z_{-n} - z}{1 - \overline{z_{-n}} z}$$

Proposição 3.2. *A sequência z_n definida acima é uma sequência de Blaschke (MARTÍNEZ-AVENDAÑO; ROSENTHAL, 2007, p. 57). Logo existe o produto de Blaschke $B = z \prod_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\overline{z_n}}{|z_n|} \frac{z_{-n} - z}{1 - \overline{z_{-n}} z} = z \prod_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\overline{z_n}}{|z_n|} \phi^n(z)$. Além disso $C_\phi B = -B$.*

Demonstração. Observamos que se escrevermos $s_n = \dfrac{1 - z_n}{1 + z_n}$, teremos $s_n = \left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^n$, para $n \in \mathbb{Z}$, e daí

$$z_n = \frac{1 - s_n}{1 + s_n} = \frac{(1+r)^n - (1-r)^n}{(1+r)^n + (1-r)^n}.$$

Logo, podemos facilmente verificar que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$, e portanto $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de Blaschke.

Temos ainda que $C_\phi B = B \circ \phi = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \phi^n \circ \phi = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \phi^{n+1}$, onde $\lambda_0 = 1$ e $\lambda_n = \dfrac{\overline{z_n}}{|z_n|}$. Assim $C_\phi B = \lambda B$, onde $\lambda = \lim_{n \to \infty} \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{-n}} = -1$. □

Lema 3.1. *Sendo $BH^2 = \{Bf : f \in H^2\}$. Consideremos $K_B = (BH^2)^\perp$, temos que K_B é invariante por C_ϕ e por C_ϕ^{-1}*

Demonstração. Seja $f \in K_B$ e $g \in H^2$, temos que

$$\langle f, Bg \rangle = \langle f\overline{B}, g \rangle = 0,$$

ou seja, $f\overline{B} \equiv 0$. Logo

$$\overline{f \circ \phi B \circ \phi} = -\overline{f \circ \phi B} \equiv 0,$$

portanto temos que $(f \circ \phi)\overline{B} \equiv 0$, então temos que

$$\langle f \circ \phi, Bg \rangle = \langle f \circ \phi \overline{B}, g \rangle = 0,$$

para todo $g \in H^2$, assim temos que $f \circ \phi \in (BH^2)^\perp$, o mesmo argumento com ϕ^{-1} no lugar de ϕ mostra que $f \circ \phi^{-1} \in (BH^2)^\perp$. □

Lema 3.2. *Considerando $K_B = (BH^2)^\perp$, temos que*

$$H^2 = K_B \oplus BK_B \oplus B^2 K_B \oplus \ldots$$

é uma soma direta ortogonal, e cada espaço $B^j K_B$, com $j \geqslant 0$, é invariante sobre C_ϕ^*.

Demonstração. Sejam $f, g \in K_B$, e $k > j$, Temos então que

$$\langle B^j f, B^k g \rangle = \langle f, B^{k-j} g \rangle = 0.$$

Como $(K_B \oplus ... \oplus B^{N-1}K_B)^{\perp} = B^N H^2$, e $\bigcap_{N=0}^{\infty} B^N H^2 = \{0\}$, vemos que a soma direta dos espaços $B^j K_B$ é densa em H^2. Sendo fechada é igual ao espaço H^2.

$K_B = \overline{span\{k_{z_n} : n \in \mathbb{Z}\}}$, pois uma função está em BH^2 se, e somente se tem zeros em todos z_n, e como $C_\phi^* k_{z_n} = k_{z_{n+1}}$, para cada n, temos que K_B é invariante sobre C_ϕ^*.

Sejam $f \in K_B$ e $j, k \geqslant 0$.

$$\langle B^j f, C_\phi^*(B^k k_{z_n})\rangle = \langle (B \circ \phi)^j (f \circ \phi), B^k k_{z_n}\rangle = 0,$$

se $j \neq k$, pois pela Proposição 3.2 $B \circ \phi = -B$ e pelo Lema 3.1 K_B é invariante por C_ϕ, se $j = k$, $\langle B^j f, C_\phi^*(B^k k_{z_n})\rangle = (-1)^j \langle f, k_{z_{n+1}}\rangle$. Então, C_ϕ^* aplica $B^j k_{z_n}$ para $(-1)^j B^j k_{z_{n+1}}$. Assim, $B^j K_B$ é invariante sobre C_ϕ^*. □

Lema 3.3. *Para cada $j = 0, 1, 2, ...$, o conjunto de funções normalizadas*

$$e_{j,n} := (1 - |z_n|^2)^{1/2} B^j k_{z_n}, \; n \in \mathbb{Z},$$

forma uma base de Riesz para $B^j K_B$. Assim, $C_\phi^*|_{B^j K_B}$ é similar à bilateral weighted shift, com pesos $w_n = (-1)^j \dfrac{(1 - |z_n|^2)^{1/2}}{(1 - |z_{n+1}|^2)^{1/2}}$.

Demonstração. Isto segue do resultado que uma sequência de núcleos de reprodução $((1 - |z_n|^2)^{1/2} k_{z_n})_n$ é uma base de Riesz para o fecho de seu span se, e somente se a sequência $(z_n)_n$ é uma sequência de Carleson (CHALENDAR; PARTINGTON, 2011, p. 33). Como a multiplicação por B é uma isometria, o mesmo se aplica para a sequência $(e_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}}$, para $j \geqslant 0$. □

Observamos que $|z_n| = \dfrac{1 - a^{|n|}}{1 + a^{|n|}}$, portanto $|z_n|$ é assimptótico a $1 - 2a^{|n|}$ para $|n|$ suficientemente grande, então $(1 - |z_n|^2)^{1/2}$ é assimptótico a $2a^{|n|/2}$. Assim os pesos satisfazem $w_n \to a^{-1/2}$, quando $n \to +\infty$ e $w_n \to a^{1/2}$, quando $n \to -\infty$.

Teorema 3.1. *Seja C_ϕ o operador de composição induzido pelo automorfismo hiperbólico $\phi(z) = \dfrac{z + r}{1 + rz}$, e seja $a = \dfrac{1 - r}{1 + r}$, então para todo número complexo λ, com $\sqrt{a} < |\lambda| < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, o operador $C_\phi - \lambda I$ é universal.*

Demonstração. Do lema 3.3, temos que para todo $j \geqslant 0$, $C_\phi^*|_{B^j K_B}$ é equivalente para uma bilateral shifts, onde o peso tende para $d = \sqrt{a}$, em $-\infty$ e para $c = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, em $+\infty$, com $d < c$. Assim pela proposição 3.1 temos que para todo $j \geqslant 0$ e λ, com $\sqrt{a} < |\lambda| < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, $C_\phi - \lambda I|_{B^j K_B}$, possui núcleo não trivial. Portanto $C_\phi - \lambda I$, possui núcleo infinito.

Para todo $j \geqslant 0$ e λ, com $\sqrt{a} < |\lambda| < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, temos pela proposição 3.1 que $C_\phi^* - \lambda I|_{B^jK_B}$ não possui autovalores e nem autovalores aproximados, assim $C_\phi - \lambda I$ é sobrejetora em cada B^jK_B. Por $C_\phi B^j k_{z_n} = (-1)^j k_{z_{n+1}}$, temos que $(C_\phi^* - \lambda I)B^j(k_{z_n}) = B^j(C_\phi^* - \lambda I)(k_{z_n})$ e $(C_\phi^* - \lambda I)B^j(Bk_{z_n}) = B^j(C_\phi^* - \lambda I)(Bk_{z_n})$, quando j é par, como a multiplicação por B^j é uma isometria temos que se i e j tem a mesma paridade, $C_\phi^* - \lambda I|_{B^jK_B}$ e $C_\phi^* - \lambda I|_{B^iK_B}$, são unitariamente equivalentes, assim $C_\phi^* - \lambda I$ é limitada inferiormente e $Im(C_\phi^* - \lambda I)$ é fechada, então $Im(C_\phi - \overline{\lambda} I)$ é fechada, para todo λ, com $\sqrt{a} < |\lambda| < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$. Como $H^2 = K_B \oplus BK_B \oplus B^2K_B \oplus ...$, tem-se que $C_\phi - \lambda I$ é sobrejetora em H^2. Portanto $C_\phi - \lambda I$ é universal. □

Corolário 3.1. *Seja C_ϕ um operador de composição induzido por um automorfismo de disco hiperbólico. Então todo operador em H^2 possui subespaço invariante se, e somente se todo subespaço invariante de C_ϕ possui um subespaço invariante próprio.*

Demonstração. Supomos que todo subespaço invariante de C_ϕ possui um subespaço invariante próprio. Pelo teorema 3.1 existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $C_\phi - \lambda I$ é universal, vemos facilmente que todo subespaço invariante por $C_\phi - \lambda I$ é invariante por C_ϕ e que todo subespaço invariante por C_ϕ é invariante por $C_\phi - \lambda I$, assim pelo teorema 2.3 temos que todo operador em H^2 possuí subespaço invariante próprio. A reciproca é obviamente verdadeira. □

3.3 Subespaços Minimais e Autofunções

Definição 3.2. *Seja H um espaço de Hilbert e $T \in B(H)$. Um subespaço fechado $M \subset H$ é dito minimal se M é invariante por T e não possui um subespaço invariante próprio.*

Seja H um espaço de Hilbert, $T \in B(H)$ e $x \in H$, consideramos $K_x = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n x$. Onde $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n x = \overline{span\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}}$. Caso A seja invertível podemos considerar $\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n x = \overline{span\{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}}$.

Proposição 3.3. *Seja H um espaço de Hilbert, $T \in B(H)$ e M um subespaço minimal. Então se $x \in M$, com $x \neq 0$, temos que $M = K_x$.*

Demonstração. Seja $x \in M$, com $x \neq 0$, temos K_x é um subespaço invariante prórpio de M, como M é minimal, temos que $K_x = M$.

□

Proposição 3.4. *Seja H um espaço de Hilbert, $T \in B(H)$ invertível e K_x um subespaço minimal. Então $T^{-1}K_x \subset K_x$, e*

$$K_x = \bigvee_{n=-\infty}^{n=+\infty} T^n x.$$

Demonstração. Como K_x é minimal, temos que $K_{Tx} = K_x$. Assim $K_x = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n x = T^{-1}(\bigvee_{n=1}^{\infty} T^n x) = T^{-1}K_x$. □

Proposição 3.5. *Seja H um espaço de Hilbert e $T \in B(H)$. São equivalentes:*

1. *Se $M \subseteq H$ é um subespaço de dimensão infinita e invariante por T, então $T|_M$ possui um subespaço invariante não trivial.*
2. *Seja $u \in H\backslash\{0\}$. K_u é minimal se u é um autovetor de T.*

Demonstração. Supomos que o item (1) seja verdadeiro. Seja $u \in H\backslash\{0\}$, tal que K_u é minimal, como K_u é invariante por T, pelo item (1) temos que K_u tem dimensão finita, assim temos que K_u tem dimensão 1, portanto u é um autovetor de T.

Agora supomos que o item (2) seja verdadeiro. Seja $M \subseteq H$, um subespaço de dimensão infinita e invariante por T, e seja $u \in M\backslash\{0\}$, se $K_u \neq M$, temos que K_u é um subespaço invariante não trivial de $T|_M$, se $K_u = M$, temos que K_u possui dimensão infinita e então u não pode ser um autovetor de T, e então pelo item (2) temos que $T|_{K_u} = T|_M$ possui um subespaço invariante não trivial. □

Como consequência direta dessa proposição temos:

Corolário 3.2. *Seja ϕ um automorfismo de disco hiperbólico, então são equivalentes.*

1. *Todo operador limitado em um espaço de Hilbert possui um subespaço invariante não trivial.*
2. *Seja $u \in H^2$, K_u é minimal se u é uma autofunção de C_ϕ.*

Teorema 3.2. *Seja $u \in H^2$, α ponto fixo de ϕ. Suponhamos que u tem limite não-tangencial não nulo em α. Se u é essencialmente limitada em um arco aberto contendo α, então K_u é minimal se, e somente se u é constante.*

Demonstração. Supomos sem perda de generalidade que $\alpha = 1$ e observamos que $z_n = \phi^n(0) \geqslant 0$, se $n \geqslant 0$.

Temos pela Forma Integral de Poison que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f\circ\phi^n)(e^{i\theta})d\theta = (f\circ\phi^n)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})P_{\phi^n(0)}(\theta)d\theta,$$

portanto,

$$\begin{aligned}\|C_\phi^n u - u(1)\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(\phi^n(e^{i\theta})) - u(1)|^2 d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|(u-u(1))\circ\phi^n(e^{i\theta})|^2 d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(e^{i\theta}) - u(1)|^2 P_{z_n}(\theta)d\theta.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Seja $\epsilon > 0$, por u ser contínua em 1 existe $\delta > 0$, tal que $|u(e^{i\theta}) - u(1)| < \frac{\epsilon}{2}$ se $|\theta| \leqslant \delta$.

Temos que $P_{z_n}(\theta)_{z_n}(\delta)$ se $|\theta| > \delta$ e $P_{z_n} \to 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $P_{z_n}(\delta)\|u - u(1)\|^2 < \frac{\epsilon}{2}$, se $n \geqslant n_0$. assim

$$\begin{aligned}\|C_\phi^n u - u(1)\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|u(e^{i\theta}) - u(1)|^2 P_{z_n}(\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta|>\delta}|u(e^{i\theta}) - u(1)|^2 P_{z_n}(\theta)d\theta\\ &\leqslant \frac{\epsilon}{2} + P_{z_n}(\delta)\|u - u(1)\|^2 < \epsilon\end{aligned} \tag{3.4}$$

Se $n \geqslant n_0$. Portanto temos que $(C_\phi^n u)_n$ tende para $u(1)$ em H^2, e como $u(1) \neq 0$, temos que $C \subset K_u$, onde C é o espaço das funções constantes. Claramente C é invariante sobre todos os operadores de composição, assim se u é não constante temos que K_u não é minimal. □

Como consequência direta desse teorema temos:

Corolário 3.3. *Seja $u \in H^\infty$, α ponto fixo de ϕ. Se u tem limite não-tangencial não nulo em α, então K_u é minimal se, e somente se u é constante.*

Teorema 3.3. *Se $u \in H^2$ e satisfaz as seguintes condições*

1. $\overline{\lim_{z\to -1}}|u(z)| < \infty$

2. $|u(z)| \leqslant C|z-1|^{\epsilon}$*, para algum* C*,* $\epsilon > 0$*, em alguma vizinhança de* 1*.*

Então o espectro pontual de $C_{\phi}|_{K_u}$*, contém o anel* $\{q : 3^{-\min(\epsilon, \frac{1}{2})} < |q| < 1\}$*, exceto possivelmente algum subconjunto discreto.*

Demonstração. Supomos sem perda de generalidade que $\phi(z) = \dfrac{2z+1}{z+2}$, $z \in \mathbb{D}$, assim vemos facilmente que

$$\phi'(z) = \frac{3}{z+2}$$

e

$$\phi^n(z) = \frac{(3^n+1)z + 3^n - 1}{(3^n-1)z + 3^n + 1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $z \neq -1$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |1 - \phi^n(z)|^{\frac{\epsilon}{n}} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| \frac{2(1-z)}{3^n(z+1) + 1 - z} \right|^{\frac{\epsilon}{n}} = 3^{-\epsilon}.$$

A série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n C_{\phi}^n u(z)$ converge absolutamente se

$$1 < |q| < (\overline{\lim_{n\to+\infty}} |C_{\phi}^n u(z)|^{\frac{1}{n}})^{-1}.$$

Temos

$$(\overline{\lim_{n\to+\infty}} |C_{\phi}^n u(z)|^{\frac{1}{n}})^{-1} = (\overline{\lim_{n\to+\infty}} |u(\phi^n(z))|^{\frac{1}{n}})^{-1} \geqslant (\overline{\lim_{n\to+\infty}} C|1 - \phi^n(z)|^{\frac{\epsilon}{n}})^{-1} = 3^{\epsilon},$$

pela condição (2), por $\phi^n(z)$ se aproximar de 1 para valores suficentementes grandes de n. Portanto para q no anel $1 < |q| < 3^{\epsilon}$ a série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n C_{\phi}^n u(z)$ converge absolutamente.

Consideramos $v(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n C_{\phi}^n u(z)$. Podemos mostrar que para algum q, v não é identicmente nulo. Seja w, tal que $u(w) \neq 0$. Consideremos a série de Laurent $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$ em q, onde $a_n = C_{\phi}^n u(w)$. Assim se $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n = 0$ para todo q, com $1 < |q| < 3^{\epsilon}$, temos que $a_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Em particular $u(w) = a_0 = 0$, contradição. Portanto para todo q no anel $1 < |q| < 3^{\epsilon}$, exceto possivelmente um subconjunto discreto, temos que $v(w) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n \neq 0$.

$$C_{\phi} v = C_{\phi}(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n C_{\phi}^n u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n C_{\phi}^{n+1} u = q^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n+1} C_{\phi}^{n+1} u = q^{-1} v.$$

Portanto q^{-1} é um autovalor de C_ϕ se $v \in H^2$.

Denotamos por γ_s o semi-círculo superior, fixemos $z_0 \in \gamma_s$. Consideremos $a(n)$, o arco de $\phi^{n-1}(z_0)$ para $\phi^n(z_0)$ e $b_n = \displaystyle\int_{a(n)} |v|^2$. Então

$$\int_{\gamma_s} |v|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{a(n+1)} |v|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n.$$

Também

$$\int_{a(n+1)} |v|^2 = \int_{a(n)} |\phi'||v \circ \phi|^2 = |q|^{-2} \int_{a(n)} |\phi'||v|^2 < |q|^{-2} \max_{z \in a(n)} |\phi'| \int_{a(n)} |v|^2.$$

Portanto

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \lim_{n \to +\infty} |q|^{-2} \max_{z \in a(n)} |\phi'(z)| = \frac{|q|^{-2}}{3},$$

pois, $\phi'(z) \to \dfrac{1}{3}$, quando $z \to 1$. Similarmente obtemos

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{|q|^2}{3}.$$

A série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n$ converge se $|\dfrac{q^{-2}}{3}| < 1$ e $|\dfrac{q^2}{3}| < 1$.

Supomos que $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < |q| < \sqrt{3}$, e como $\dfrac{1}{3} \leqslant |\phi'(z)| \leqslant 3$, para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{a(n+1)} |v|^2 < \infty$$

se $\displaystyle\int_{a(1)} |v|^2 < \infty$. Portanto $v \in L^2(\gamma_s)$, se $\displaystyle\int_{a(1)} |v|^2 < \infty$, para isso é suficiente mostrar que

$$\sum_{|n|>N} |q^n||u \circ \phi^n| \in L^2(arc(z_0, \phi(z_0))).$$

Mas, para $|n| > N$, com N suficientemente grande e $z \in arc(z_0, \phi(z_0))$, $\phi^n(z)$ está proximo de 1 ou -1, e u próximo de 1 é menor que $C|1-z|^\epsilon$. Temos que para $n > N$ e $z \in arc(z_0, \phi(z_0))$,

$$|u \circ \phi^n| < C|1 - \phi^n(z)|^\epsilon \leqslant C|1 - \phi^n(z_0)|^\epsilon.$$

Então

$$\sum_{n>N} |q^n u \circ \phi^n(z)| < \sum_{n>N} |q^n|C|\phi^n(z_0) - 1|^\epsilon < C_1 < \infty,$$

pois essa série converge absolutamente em z_0.

$$\sum_{n<-N} |q^n u \circ \phi^n(z)| < C_2 < \infty,$$

para todo $z \in arc(z_0, \phi(z_0))$, pois u é limitada próxima a -1. Logo $\sum_{|n|>N} |q|^n |u \circ \phi^n|$ é limitada e então pertence a $L^2(arc(z_0, \phi(z_0)))$. Portanto $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |q|^n |u \circ \phi^n| \in L^2(\gamma_s)$.

Similarmente, tomando z_0 no semi-círculo inferior (γ_{inf}), podemos mostrar que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |q|^n |u \circ \phi^n| \in L^2(\gamma_{inf})$. $|\sum_{|n|<N} q^n u \circ \phi^n| < \sum_{n=-\infty}^{\infty} |q|^n |u \circ \phi^n|$, para todo $N \in \mathbb{N}$, e $\sum_{|n|<N} q^n u \circ \phi^n \to v$, μ-q.s. Portanto pelo teorema da convergência dominada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n u \circ \phi^n = v$. Como $u \circ \phi^n \in H^2$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que $v \in H^2$. □

Teorema 3.4. *Se u é uma função interna (MARTÍNEZ-AVENDAÑO; ROSENTHAL, 2007, p. 48) e há uma sequência (λ_n) em $\mathbb{C}$, com $|\lambda_n| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que $\prod_{n \geqslant 0} (\lambda_n u \circ \phi^n) = v$, converge uniformente sobre todos subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ e $v(0) \neq 0$, então K_u é minimal se, e somente se u é constante.*

Demonstração. Consideramos $v_n = \prod_{k \geqslant n} \lambda_k u \circ \phi^k$, e observamos que $\|v_n\|_\infty \leqslant 1$. Consequentemente

$$\|v_n - 1\|_2^2 = \langle v_n, v_n \rangle + \langle 1, 1 \rangle - 2Re\langle v_n, 1 \rangle \leqslant 2\left(1 - Re \prod_{k \geqslant n} \lambda_k u(z_k)\right).$$

A condição $v(0) \neq 0$ implica que $\|v_n - 1\| \to 0$, portanto $v_n \to 1$ em H^2. Para qualquer $h \in H^2$, $\langle z v_n h, \lambda_k u \circ \phi^k \rangle = \langle z h v_n / \lambda_k u \circ \phi^k, 1 \rangle = 0$, se $k \geqslant n$. Suponha que K_u é minimal, então $\bigvee_{k \geqslant n} (u \circ \phi^k) = K_u$, para qualquer n. Segue-se que $z v_n H^2 \subseteq H^2 \ominus K_u$, para qualquer n. Portanto $zH^2 \subseteq H^2 \ominus K_u$ e assim $K_u \subseteq H^2 \ominus zH^2 = \mathbb{C}$. □

Proposição 3.6. *Se u é uma autofunção de C_ϕ, com limites não tangencial em 1 e -1, então u é constante.*

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{D}$, tal que $u(z) \neq 0$. Como $C_\phi u = \lambda u$, então $u(\phi^n(z)) = \lambda^n u(z)$, por outro lado, como $\phi^n \to 1$, temos $\lambda^n \to \dfrac{u(1)}{u(z)}$, quando $n \to \infty$. Analogamente, temos que $\lambda^{-n} \to \dfrac{u(-1)}{u(z)}$, quando $n \to \infty$. Portanto $\lambda = 1$ e $u(\phi^n(w)) = u(w)$, para todo $w \in \mathbb{D}$ e $n \geqslant 1$. Assim, $u(w) = u(1)$, e então u é constante. □

Referências

ARONSZAJN, N.; SMITH, K. T. Invariant subspaces of completely continuous operators. *Ann. Math.*, v. 60, p. 345–350, 1954.

BEURLING, A. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. *Acta Math.*, v. 81, p. 239–255, 1949.

CARADUS, S. R. Universal operators and invariant subspaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 23, n. 3, p. 526–527, 1969.

CHALENDAR, I.; PARTINGTON, J. R. *Modern approaches to the invariant-subspace problem*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. v. 188.

CHKLIAR, V. Eigenfunctions of the hyperbolic composition operator. *Integr. Equat. Oper. Th.*, v. 29, n. 3, p. 364–367, 1997.

ENFLO, P. On the invariant subspace problem in Banach spaces. In: SÉMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ, 14–15., 1975–1976. *Espaces L^p, Applications Radonifiantes et Géométrie des Espaces de Banach*. Palaiseau: École de Polytechnique, 1976.

______. On the invariant subspace problem in Banach spaces. *Acta Math.*, v. 158, n. 1, p. 213–313, 1987.

LOMONOSOV, V. I. Invariant subspaces for operators commuting with compact operators. *Funct. Anal. Appl.*, v. 7, p. 213–214, 1973.

MARTÍNEZ-AVENDAÑO, R. A.; ROSENTHAL, P. *An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*. New York: Springer-Verlag New York, 2007. (Graduate Texts in Mathematics, v. 237).

MATACHE, V. On the minimal invariant subspaces of the hyperbolic composition operator. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 119, n. 3, p. 837–841, 1993.

NORDGREN, E.; ROSENTHAL, P.; WINTROBE, F. S. Invertible composition operators on H^p. *J. Funct. Anal.*, v. 73, n. 2, p. 324–344, 1987.